CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2025**

Examen de mathématiques

OS non scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

---

Problème 1. Étude de fonction (20 points)

Étudier, avec la dérivée seconde, puis représenter (unité : 2 carrés) la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5}.$$

Durant l'étude, on montrera que $f''(x) = \dfrac{-18x(x^2 - 15)}{(x^2 + 5)^3}$.

Problème 2. Probabilités (20 points)

Lors d'une fête, un forain invite les visiteurs à participer à un jeu dont une partie consiste à tirer simultanément 3 jetons d'un sac opaque dans lequel il a placé 20 jetons indiscernables au toucher : 8 jetons numérotés ①, 6 jetons numérotés ②, 4 jetons numérotés ③ et enfin 2 jetons numérotés ④.

1. Une personne fait une partie.
   a) Calculer la probabilité qu'elle tire 3 jetons numérotés ①.
   b) Calculer la probabilité qu'elle tire 1 jeton numéroté ① et 2 jetons numérotés ②.
   c) Calculer la probabilité qu'elle tire 3 jetons identiques.
   d) Montrer que la probabilité qu'elle tire 3 jetons différents vaut $p = \frac{20}{57}$.

2. En une heure, le forain voit 10 personnes participer à son jeu. Évidemment, les jetons tirés par une personne sont remis dans le sac à la fin de chaque partie.
   a) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait exactement 4 qui tirent 3 jetons différents.
   b) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait au moins 2 qui tirent 3 jetons différents.
   c) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait exactement 4 qui tirent 3 jetons différents, sachant qu'il y en a au moins 2 qui ont tiré 3 jetons différents.
   d) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait exactement 4 qui tirent 3 jetons différents et exactement 2 qui tirent 3 jetons identiques.

3. Un joueur gagne une partie lorsqu'il tire 3 jetons différents.

   Calculer le nombre minimal de parties qu'il doit jouer pour que la probabilité qu'il gagne au moins une partie soit supérieure à 99%.

(suite au verso)

Problème 3. Géométrie dans l'espace (20 points)

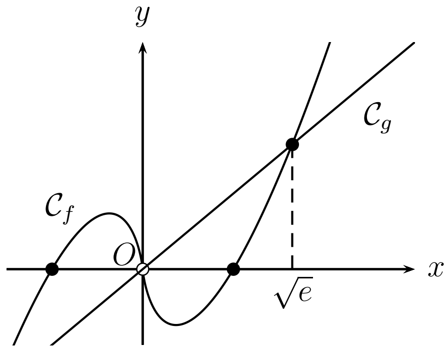
Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les quatre points $A(2;-3;-5)$, $B(-1;2;11)$, $C(3;1;1)$ et $D(-9;22;-5)$, ainsi que le plan $\pi : 2x-2y+z+67=0$.

1. Montrer que le point D appartient au plan π.
2. Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC.
3. Établir l'équation du plan (ABC).
4. Montrer que les plans π et (ABC) sont parallèles.
5. Calculer la distance entre les plans π et (ABC).
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan π et passant par le point B.
7. Calculer les coordonnées du point P appartenant à la droite d équidistant des points B et D.
8. Déterminer l'équation de la sphère Σ passant par le point B et tangente aux plans π et (ABC).
9. Déterminer une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère Σ au point B et perpendiculaire à la droite (AB).

Problème 4. Analyse (20 points)

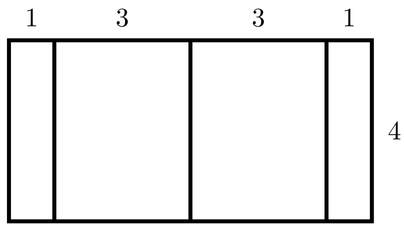
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. On considère les fonctions $f(x) = x\ln(x^2)$ et $g(x) = x$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions.

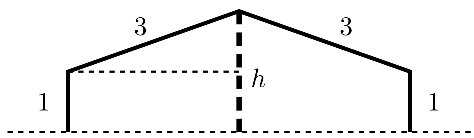


1. Calculer les zéros de la fonction f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en justifiant le résultat.
3. On voit sur le schéma que la fonction f a un minimum. Calculer ses coordonnées.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
5. Calculer l'aire du domaine borné délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ situé à droite de la verticale $x=1$.

B. Un abri pliable dont les deux parois latérales sont verticales lorsqu'elles sont montées est composé de quatre parties selon les schémas ci-dessous. Les mesures sont données en mètres. La hauteur h de l'abri peut varier de 1 à 3 mètres.



L'ABRI ÉTENDU SUR LE SOL



VUE DE FACE DE L'ABRI

1. Montrer que le volume de l'abri peut être donné par $V(h) = 4(h+1)\sqrt{-h^2+2h+8}$.
2. Montrer que $V'(h) = \dfrac{4(-2h^2+2h+9)}{\sqrt{-h^2+2h+8}}$.
3. Déterminer la hauteur h qui donne un volume maximal à l'abri.