CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2025**

Examen de mathématiques
OS scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Géométrie dans l'espace (15 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les quatre points $A(2;-3;-5)$, $B(-1;2;11)$, $C(3;1;1)$ et $D(-9;22;-5)$, ainsi que le plan $\pi : 2x-2y+z+67=0$.

1. Montrer que le point D appartient au plan π.
2. Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC.
3. Montrer que les plans π et (ABC) sont parallèles.
4. Calculer la distance entre les plans π et (ABC).
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan π et passant par le point B.
6. Déterminer l'équation de la sphère Σ, passant par les points B et D, dont le centre appartient à la droite d.
7. Calculer le volume du cône droit inscrit dans la sphère Σ ayant le point B pour sommet et son cercle de base dans le plan π.

Problème 2. Analyse (15 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. On considère la fonction f définie par $f(x) = 9\,x\,e^{-x}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en justifiant le résultat.
2. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet un point à tangente horizontale.
3. Esquisser la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Soit Q un point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x, P sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses et R sa projection orthogonale sur l'axe des ordonnées. Soit aussi O l'origine du repère. La rotation du rectangle $OPQR$ autour de l'axe des abscisses détermine un cylindre.

   Calculer la valeur de x pour que le volume de ce cylindre soit maximal.

B. L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation différentielle linéaire

$$(ED) : x\,y' - (x+1)\,y = 2x^2 - x - 1.$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation (sans second membre) $x\,y' - (x+1)\,y = 0$.
2. Déterminer les coefficients a et b pour que la fonction $p(x) = ax+b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle linéaire (ED).
3. Déduire des points 1 et 2 la solution générale de l'équation différentielle linéaire (ED).

(suite au verso)

Problème 3. Étude de fonction (15 points)

Étudier, sans la dérivée seconde, puis représenter (unité : 2 carrés) la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5}.$$

Problème 4. Algèbre linéaire (15 points)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel usuelle ainsi que de sa base canonique $\mathcal{C}$.
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi(x;y;z) = (2x + y\,;\, -3x - y + z\,;\, x - z).$$

1. Donner la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{C}$.
2. Calculer $\varphi(2;-3;1)$.
3. a) Calculer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   b) En déduire **une** valeur propre de φ et **un** vecteur propre associé à cette valeur propre.
4. Calculer $\mathrm{Im}(\varphi)$.
5. Déterminer un élément $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u) = (4;-5;1)$.
6. Soit $a \in \mathbb{R}$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\psi(x;y;z) = (x - 3y + 2z\,;\, ax - 2y - 12z\,;\, 4x + y - 4z).$$

   a) Calculer la matrice de $\varphi \circ \psi$.
   b) Calculer la valeur du nombre réel a pour laquelle ψ est une application non bijective.

Problème 5. Probabilités (20 points)

Lors d'une fête, un forain invite les visiteurs à participer à un jeu dont une partie consiste à tirer simultanément 3 jetons d'un sac opaque dans lequel il a placé 20 jetons indiscernables au toucher : 8 jetons numérotés ①, 6 jetons numérotés ②, 4 jetons numérotés ③ et enfin 2 jetons numérotés ④.

1. Une personne fait une partie.
   a) Calculer la probabilité qu'elle tire 3 jetons numérotés ①.
   b) Calculer la probabilité qu'elle tire 1 jeton numéroté ① et 2 jetons numérotés ②.
   c) Calculer la probabilité qu'elle tire 3 jetons identiques.
   d) Montrer que la probabilité qu'elle tire 3 jetons différents vaut $p = \frac{20}{57}$.
2. En une heure, le forain voit 10 personnes participer à son jeu. Évidemment, les jetons tirés par une personne sont remis dans le sac à la fin de chaque partie.
   a) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait exactement 4 qui tirent 3 jetons différents.
   b) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait au moins 2 qui tirent 3 jetons différents.
   c) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait exactement 4 qui tirent 3 jetons différents, sachant qu'il y en a au moins 2 qui ont tiré 3 jetons différents.
   d) Calculer la probabilité que, parmi les 10 personnes, il y en ait exactement 4 qui tirent 3 jetons différents et exactement 2 qui tirent 3 jetons identiques.
3. Un joueur gagne une partie lorsqu'il tire 3 jetons différents. Son gain est alors égal à la valeur en francs du jeton avec la valeur la plus élevée.

   Calculer l'espérance de gain du joueur.