

Maturité gymnasiale

Session 2025

Examen de l'option complémentaire Application des mathématiques

Temps à disposition : 3 heures

Note maximale (6) pour 52,5 points sur 56

« Formulaires et Tables » à disposition

Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Variables aléatoires (9+10 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une urne opaque contient 10 billes : 3 bleues, 2 vertes et 5 rouges. Un joueur extrait 3 billes simultanément, au hasard.

S'il tire 3 billes de couleurs différentes, il gagne n francs ($n > 0$). S'il tire 3 billes rouges, il perd n^2 francs. S'il tire les 2 billes vertes, il gagne 50 francs. Dans tous les autres cas, il ne gagne ni ne perd rien.

Soit X la variable aléatoire indiquant le gain du joueur.

1. Exprimer l'espérance de X en fonction du paramètre n .
2. Calculer n pour que le jeu soit équilibré (c'est-à-dire afin que l'espérance de X soit nulle).
3. Calculer la variance de X avec la valeur $n = 10$.

Partie B

Le revenu annuel moyen des employés de commerce d'une région est de 65'000 CHF, avec un écart-type de 8'000 CHF.

On prélève un échantillon aléatoire de 100 employés de commerce habitant cette région.

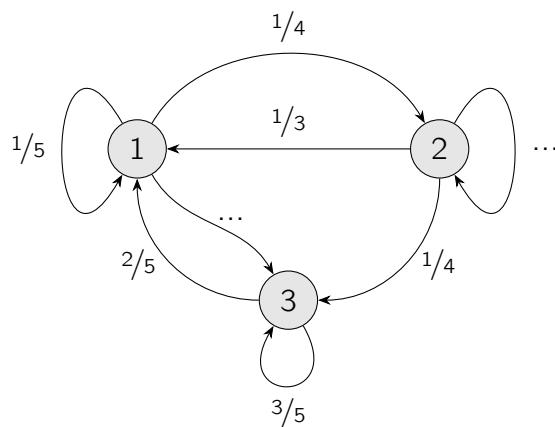
1. On peut supposer que la moyenne des revenus de ces 100 employés suit une loi normale. Calculer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que la moyenne des revenus de cet échantillon soit supérieure à 66'500 CHF.
3. Calculer la probabilité que la moyenne des revenus de cet échantillon se situe à plus de 250 CHF de la vraie moyenne.
4. Si on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 0,5% de chances d'être obtenues, calculer les valeurs entre lesquelles la moyenne des revenus de ces 100 employés doit se trouver.

Problème 2. Calcul matriciel (9+11 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère la chaîne de Markov représentée par le graphe ci-dessous.



1. Calculer les probabilités de transition manquantes puis donner la matrice de transition $T = (t_{ij})$ de la chaîne de Markov. On utilisera la définition vue dans le cours :

$$t_{ij} = \text{probabilité de passer de l'état } j \text{ à l'état } i.$$

2. On veut déterminer la distribution invariante π de la chaîne. Établir un système d'équations linéaires ayant π comme unique solution.
3. Donner la matrice augmentée associée au système établi à la fin du point précédent.
Échelonner et réduire cette matrice grâce à la méthode du pivot : en déduire la distribution invariante π .

Partie B

On se donne pour clé d'un chiffrement de Hill la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

1. Chiffrer le mot « **PNEU** » grâce à cette clé.
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide étendu pour calculer l'inverse de 23 (mod 26).
3. Déterminer la matrice $A^{-1} \pmod{26}$.
4. Déchiffrer le mot « **KS** ».

Voici un tableau à utiliser pour les conversions.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Problème 3. Équations différentielles (9 points)

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = r(27 - y)$$

où r est un coefficient réel non nul.

2. On sert des boules de glace dans un bol. La température de l'air est de 27°C et la température initiale de la glace est de -12°C . Après 10 minutes, la température de la glace est passée à -6°C .

La fonction $y(t)$ qui décrit la température de la glace (en $^\circ\text{C}$) en fonction du temps t (en minutes) satisfait l'équation du point 1 : déterminer alors $y(t)$ en tenant compte des conditions données.

3. Calculer le temps qu'il faut attendre pour que la température de la glace atteigne 3°C .

Problème 4. Calculs financiers (8 points)

Pour cet exercice, on travaille dans le modèle des intérêts composés.

1. Un capital est placé à un taux d'intérêt annuel de 3,5%. Après 12 ans, il a acquis une valeur de 30'000 CHF.

Calculer la valeur initiale du capital.

2. Un capital de 10'000 CHF est placé pendant 3 ans. L'intérêt produit s'élève à 800 CHF.

Calculer le taux d'intérêt annuel.

3. Un capital de 20'000 CHF placé à un taux d'intérêt annuel de 4,8% a acquis une valeur de 45'000 CHF.

Calculer le nombre d'années de placement.

4. On désire constituer un capital de 80'000 CHF en 60 mois. On verse au début de chaque mois la même somme. Les intérêts sont capitalisés mensuellement au taux d'intérêt de 0,15%.

Calculer la somme à verser mensuellement.