JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2024**

Examen de mathématiques
OS scientifiques

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 75 points sur 80
« Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

---

Problème 1. Géométrie dans l'espace (15 points)

Dans un repère orthonormé, on donne la droite $d : \begin{cases} x = 11 + 2\lambda \\ y = -9 + \lambda \\ z = -7 + 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$,

ainsi que le point $A(25; 4; -5)$.

1. Montrer que le plan $\pi_1 : 2x - 2y - z = 47$ contient d et A.
2. Déterminer le plan π_2 orthogonal au plan π_1 et contenant d.
3. Calculer la distance entre le point A et la droite d.
4. Calculer les coordonnées des points P et Q de la droite d qui sont à une distance 15 du point A.
5. Calculer l'angle en A du triangle APQ.
6. On considère le cône droit Γ de sommet A dont le cercle de base se trouve dans π_2, le segment $[PQ]$ donnant son diamètre. Calculer le volume du cône Γ.

Problème 2. Analyse (15 points)

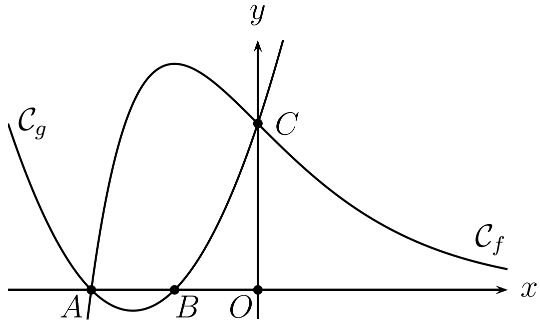
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = (x+2)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 3x + 2$$

dont les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont esquissées ci-contre dans un repère orthonormé.



1. Calculer les coordonnées des points d'intersection A, B et C de $\mathcal{C}_g$ avec les axes.
2. Vérifier que A et C sont aussi des points de $\mathcal{C}_f$.
3. Soit P un point d'abscisse positive x de la courbe $\mathcal{C}_f$. Soit également le point H de l'axe Ox de même abscisse que P. Calculer la valeur de x pour que l'aire du triangle BHP soit maximale.

Partie B

Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^{x^2}$ qui passe par $(1; 2e)$.

(suite au verso)

Problème 3. Étude de fonction (15 points)

Étudier, **sans la dérivée seconde**, puis représenter (unité : 1 carré) la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2 - 3x + 4}.$$

Problème 4. Probabilités (20 points)

Une classe de lycée est constituée de 11 élèves : 2 garçons, nommés Balthazar et Melchior, et 9 filles, dont Bénédicte. Chaque jour d'école, du lundi au vendredi, cette classe assiste à une heure de mathématiques. Les élèves s'installent au hasard dans une salle de 6 tables à deux places ayant cette configuration.

dernier rang	`G` `H`	`I` `J`	`K` `L`
premier rang	`A` `B`	`C` `D`	`E` `F`
		bureau du prof.	

1. Calculer le nombre de manières que les élèves ont de s'installer.
2. Montrer que la probabilité que les garçons soient tous les deux au premier rang vaut $p = \frac{5}{22}$.
3. Calculer la probabilité que Melchior occupe la place `A` et Balthazar la place `D`.
4. Calculer la probabilité que les garçons soient à la même table.
5. Calculer la probabilité que Balthazar ne soit pas à la même table que Bénédicte.
6. Calculer la probabilité que Bénédicte soit au premier rang sachant que Melchior occupe une place au dernier rang.
7. Un jour donné, Balthazar est absent. Calculer la probabilité que les places `C` ou `D` soient libres ce jour-là.
8. Calculer la probabilité que sur les 5 jours de la semaine, les garçons soient tous les deux au premier rang exactement deux jours.
9. Estimer la probabilité que, sur les 195 jours d'école de l'année, les garçons soient tous les deux au premier rang entre 30 et 50 fois, bornes non comprises.

Problème 5. Algèbre linéaire (15 points)

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ donné par $f\big((x;y)\big) = (-6x + 14y; -3x + 7y)$.
   a) Calculer l'image par f du vecteur $(13;6)$.
   b) Donner la matrice A de l'endomorphisme f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   c) Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme f.
2. On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   a) Le vecteur $(-4;-2)$ est-il un vecteur propre de l'endomorphisme g ? Dans l'affirmative, donner la valeur propre à laquelle il est associé.
   b) Calculer les valeurs propres de g et les sous-espaces propres associés.
   c) Donner une base de vecteurs propres de g et exprimer sa matrice relativement à cette base.
   d) Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme g.
3. Calculer la matrice associée à l'endomorphisme $h = g \circ f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.