

Examen final de l'Option Complémentaire

Applications des Mathématiques

Matériel autorisé : calculatrice sans liaison internet.

Exercice 1 12 points

On donne les deux nombres complexes

$$z_1 = -1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Écrivez $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
2. Écrivez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
3. Déduisez-en le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
4. Déduisez des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
5. Calculez la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ soit un réel.

* * * * *

Exercice 2 10 points

Résolvez l'inéquation du deuxième degré en x suivante. On discutera selon les valeurs du paramètre réel m .

$$(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + 3m - 2 \geq 0.$$

* * * * *

Exercice 3 12 points

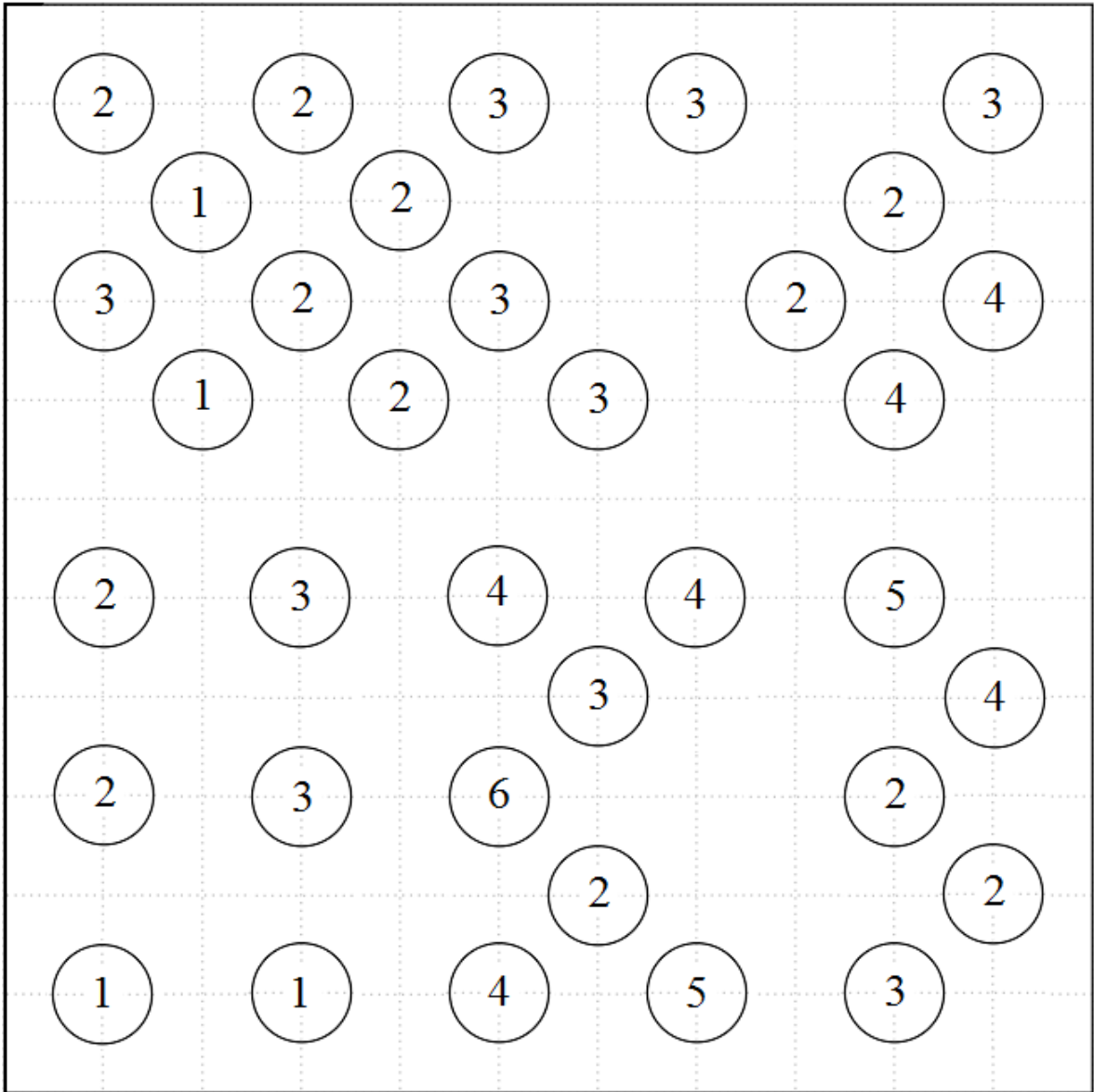
1. Considérons comme mot de passe OPTION COMPLÉMENTAIRE MATHÉMATIQUES.
 - (a) Donnez alors la grille de chiffrement de Play Fair.
 - (b) Dites ce qu'est un pangramme, et expliquez son utilité dans l'élaboration d'une grille de chiffrement (genre Play fair ou Collon).
 - (c) Chiffrez le message
Vivement la fin des examens que je fasse autre chose.,
 - i. selon un chiffrement de Play fair ;
 - ii. selon un chiffrement de Collon (même grille) de nombre clef 8.
2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$.
 - (a) Expliquez pourquoi la matrice M peut servir de matrice à un chiffrement de Hill.
 - (b) Déterminez alors sa matrice inverse modulo 26. Faites une vérification.

* * * * *

Exercice 4 10 + 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

1. Soient les deux formules suivantes, où les lettres sont toutes des variables propositionnelles.
 - $F_1 : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \vee ((\neg B) \wedge C)$;
 - $F_2 : (((A \wedge B) \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow ((\neg A \Rightarrow C) \wedge B)$.
 - (a) Écrivez leur table de vérité.
 - (b) Précisez si ce sont des tautologies.
 - (c) Donnez l'écriture polonaise de F_2 .
 - (d) Donnez la forme normale conjonctive de F_1 .
 - (e) Donnez la forme normale disjonctive de F_2 .
2. Jeu des ponts. Chaque cercle représente une île. Le chiffre à l'intérieur du cercle indique le nombre de lignes (ponts) qui passent sur cette île. Les ponts qui relient les îles voisines ne sont que des traits horizontaux et verticaux. Les îles peuvent être reliées avec des lignes simples ou doubles. Au final, toutes les îles sont reliées les unes aux autres. Des intersections, des ponts diagonaux et des liaisons avec plus de deux lignes sont prohibées. Reliez les îles entre elles sous ces contraintes.



* * * * *

