

## Examen final de l'Option Complémentaire

### Applications des Mathématiques

Matériel autorisé : calculatrice sans liaison internet.

#### Exercice 1 14 points

1. (a) Montrez que  $3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$ .
- (b) Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0.$$

2. Résolvez dans  $\mathbb{C}$  les équations

$$z + \frac{1}{z} = 1 \tag{1.1}$$

et

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}. \tag{1.2}$$

3. Soit  $P$  le polynôme défini sur la variable complexe  $z$  par

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

- (a) Vérifiez que pour tout complexe non nul, on a

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}.$$

- (b) En utilisant ce qui précède, résolvez l'équation  $P(z) = 0$ .

\* \* \* \* \*

#### Exercice 2 11 points

Résolvez l'inéquation du deuxième degré en  $x$  suivante. On discutera selon les valeurs du paramètre réel  $m$ .

$$(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + 3m - 2 \geq 0.$$

\* \* \* \* \*

### Exercice 3 13 points

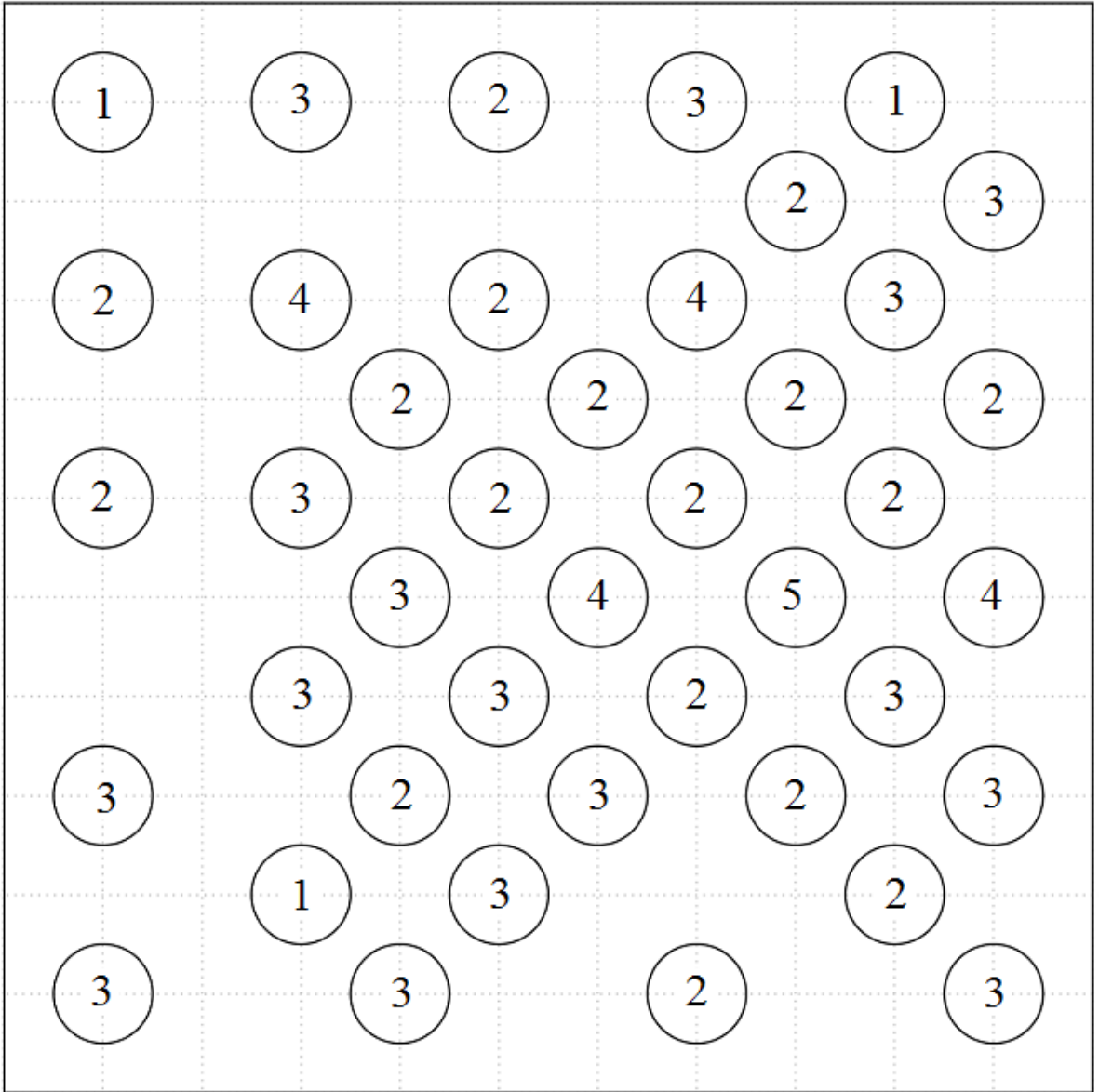
1. Considérons comme mot de passe votre PRÉNOM+NOM (exemple : pour moi, ce serait BENJAMIN BERGÉ)
  - (a) Donnez alors la grille de chiffrement de Play Fair.
  - (b) Quelle différence cela ferait-il de prendre comme mot de passe NOM+PRÉNOM ?
  - (c) Chiffrez le message  
La maturité écrite deux mille dix-huit se déroule entre les vingt-trois et vingt-sept mai,
    - i. selon un chiffrement de Play fair ;
    - ii. selon un chiffrement de Collon (même grille) de nombre clef 8.
2. Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ .
  - (a) Expliquez pourquoi la matrice  $M$  peut servir de matrice à un chiffrement de Hill.
  - (b) Déterminez alors sa matrice inverse modulo 26. Faites une vérification.

\* \* \* \* \*

### Exercice 4 10 + 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

1. Soient les deux formules suivantes, où les lettres sont toutes des variables propositionnelles.
  - $F_1 : ((A \vee B) \Rightarrow (C \wedge A)) \vee ((B \wedge A) \vee C)$  ;
  - $F_2 : ((A \wedge C) \vee B) \Leftrightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A)$ .
  - (a) Écrivez leur table de vérité.
  - (b) Précisez si ce sont des tautologies.
  - (c) Donnez l'écriture polonaise de  $F_2$ .
  - (d) Donnez la forme normale conjonctive de  $F_1$ .
  - (e) Donnez la forme normale disjonctive de  $F_2$ .
2. Jeu des ponts. Chaque cercle représente une île. Le chiffre à l'intérieur du cercle indique le nombre de lignes (ponts) qui passent sur cette île. Les ponts qui relient les îles voisines ne sont que des traits horizontaux et verticaux. Les îles peuvent être reliées avec des lignes simples ou doubles. Au final, toutes les îles sont reliées les unes aux autres. Des intersections, des ponts diagonaux et des liaisons avec plus de deux lignes sont prohibées. Reliez les îles entre elles sous ces contraintes.



\* \* \* \* \*

