CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy
t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Maturité gymnasiale **Session 2018**

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

OS Biologie - Chimie

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes
Extrait des « Formulaires et Tables » à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1. Étude d'une fonction

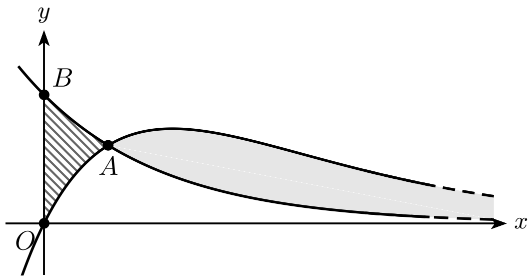
Étudier, *sans la dérivée seconde*, puis représenter (unité : 1 carré) la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{2x^2+3x-2} .$$

Problème 2. Analyse

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = 2\,x\,e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$ représentées ci-contre dans le premier quadrant.



1. Une de ces deux fonctions admet un maximum dans le premier quadrant. Calculer les coordonnées de ce maximum.
2. Calculer l'abscisse du point A.
3. Calculer l'angle aigu d'intersection des deux courbes au point A.
4. Calculer l'aire hachurée du triangle curviligne OAB.
5. Dans la surface grisée, déterminer la plus grande distance verticale entre ces deux courbes.

B. Soit la fonction h définie par $h(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{3x-2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction h.
2. Montrer que la courbe représentative de la fonction h admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -x + 5$.

Problème 3. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(3;-2;4)$, $B(7;1;5)$, $C(3;-1;5)$ et $D(9;-8;13)$.

1. Calculer l'angle en A du triangle ABC.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Établir une équation cartésienne du plan π contenant les points A, B, et C.
4. Établir une équation cartésienne du plan π' contenant le point D et parallèle au plan π.
5. Calculer les coordonnées du symétrique D' du point D par rapport au plan π.
6. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
7. Décrire l'ensemble des points P tels que le tétraèdre $ABCP$ ait le même volume que le tétraèdre $ABCD$.
8. Établir l'équation de la sphère Σ tangente au plan π en A et également tangente au plan π'.
9. Établir une représentation paramétrique de la droite t perpendiculaire à la droite (AB) et tangente à la sphère Σ en A.

Problème 4. Probabilités

Ernest joue seul au loto. Dans un sac opaque se trouvent 90 jetons. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entre 1 et 90. Voici sa carte avec les numéros à recouvrir :

2		23		43	51			81
	16	24		48		61	77	
4	19		38			64		88

Ernest tire les jetons du sac un par un (sans remise). Si le numéro tiré est inscrit sur sa carte, il le recouvre. Si tous les numéros d'une ligne sont recouverts, il crie « quine » ; si deux lignes sont entièrement recouvertes, il crie « double quine » ; enfin si les quinze numéros sont recouverts, il crie « carton ».

A. Ernest commence une partie.

1. Calculer la probabilité que le premier numéro tiré du sac soit inscrit sur sa carte.
2. Calculer la probabilité qu'il crie « quine » lors du cinquième tirage.
3. Calculer et comparer les probabilités :
   a) recouvrir les 5 numéros de la première ligne au cours des 5 premiers tirages ;
   b) ne recouvrir aucun des 5 numéros de la première ligne au cours des 85 premiers tirages.
4. Après avoir tiré 70 numéros (il en reste donc 20 dans le sac), voici la situation de sa carte :

2		23		43	51			81
	16	24		48		61	77	
4	19		38			64		88

   a) Calculer la probabilité qu'il crie « quine » dans un ou deux tirages.
   b) Calculer la probabilité d'attendre le dernier jeton tiré pour qu'il crie « carton ».

B. Nous appelons « coup de chance » l'événement : « le numéro 13 est tiré durant les 5 premiers tirages d'une partie ».

5. Vérifier que la probabilité d'un « coup de chance » est de $\dfrac{1}{18}$.
6. Ernest joue 20 parties.
   a) Calculer la probabilité qu'il ait exactement trois « coups de chance ».
   b) Calculer la probabilité que son premier « coup de chance » ait lieu à la quatrième partie.
7. Ernest joue 100 parties.

   Calculer une approximation de la probabilité qu'il ait entre 2 et 7 « coups de chance » (bornes comprises).

Problème 5. Équations différentielles et algèbre linéaire

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Soit l'équation différentielle $y' + 2y = x^2 - 1$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer la solution particulière de cette équation qui s'annule au point d'abscisse $x_0 = 2$.

B. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

1. Calculer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés.
2. Donner une base de vecteurs propres de h et exprimer sa matrice relativement à cette base.
3. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme h.
4. Soit la droite d d'équation $2x + 5y - 6 = 0$.
   Calculer l'image d' de cette droite d par l'endomorphisme h.
5. Représenter, dans un repère de $\mathbb{R}^2$, la droite d, son image d' ainsi que les sous-espaces propres associés à h.